人工智能在研究生《随机过程》课程教学中的应用与实践

摘要：随机过程在数学、物理学、工程学、经济学以及其他多个学科领域中都具有极其重要的地位。它是描述随时间或空间变化的随机现象的数学工具，通过定义在某种概率空间上的随机变量族来刻画这些现象。维纳过程作为随机过程中重要的一部分在数学中同样具有非常重要的地位。它在随机信号分析、经济学和信号处理、图像处理领域的研究中是不可或缺的。在应用数学中，维纳过程可以描述高斯白噪声的积分形式。在电子工程中，维纳过程是建立噪音的数学模型的重要部分，电子元器件在恒温下的热噪声也是一种维纳过程。控制论中，维纳过程可以用来表示不可知因素。近年来，人工智能（AI）不仅改变了人们的生活方式，还对社会、经济、科技等领域产生了深远的影响。将人工智能应用到随机过程教学中，可以产生深远的影响。针对随机过程中维纳过程的特点，本案例通过追根溯源，将维纳过程的来龙去脉，研究过程及其定义和特点进行详细分析，同时采用建模的方法设计了一个维纳过程演示的小程序，通过程序演示更直观地观察了离散型维纳过程的演示过程和结果，通过对不同参数的设置，更加直观地了解维纳过程的过程及特点，加深对维纳过程理论知识和概念的掌握，同时对维纳过程的规律有了进一步深入的理解；进一步通过 matlab 编程，将维纳过程通过计算机仿真，便于在信号处理时能更好地分析和模拟维纳过程。最后，案例通过列举维纳过程在股票价格和图像信号处理中的应用，使得将纯理论的知识应用到实践中，更加深刻感受到知识来源于生活，应用于生活，理论来源于实际，应用于实际的道理。

关键词：布朗运动；维纳过程；人工智能；数学建模；仿真，应用

1. 引言

维纳过程（Wiener process）作为一种具有连续时间参数和连续状态空间的基本随机过程，其理论不仅在概率论与随机过程学科中占有相当重要的地位，而且是刻画金融资产价格随时间演变过程的重要数学工具，在金融领域有着广泛的应用。1827 年，英国植物学家 Brown 利用显微镜观察察漂浮在平静的液面上的微小粒子时，发现微粒在不停地做无规则运动，这种现象后来就被称为布朗运动。Einstein 在 1905 年首先使用统计方法对布朗运动进行了定量研究，通过可测量物理量来研究布朗运动的宏观统计特性，建立了布朗运动的物理模型。1923 年，美国数学家 Wiener 将 Einstein 的布朗运动物理模型抽象为一个纯粹的随机过程数学模型，因此,布朗运动也被称为维纳过程，维纳过程是布朗运动的数学模型。

布朗的发现是一个新奇的现象，它的原因是什么？人们是迷惑不解的。在布朗之后，这一问题一再被提出，为此有许多学者进行过长期的研究。一些早期的研究者简单地把它归结为热或电等外界因素引起的。最早隐约指向合理解释的是维纳（1826——1896），1863 年他提出布朗运动起源于分子的振动，他还公布了首次对微粒速度与粒度关系的观察结果。不过他的分子模型还不是现代的模型，他看到的实际上是微粒的位移，并不是振动。

在维纳之后，S·埃克斯纳也测定了微粒的移动速度。他提出布朗运动是由于微观范围的流动造成的，他没有说明这种流动的根源，但他看到在加热和光照使液体粘度降低时，微粒的运动加剧了。就这样，维纳和 S • 埃克斯纳都把布朗运动归结为物系自身的性质。这一时期还有康托尼，他试图在热力理论的基础上解释布朗运动，认为微粒可以看成是巨大分子，它们与液体介质处于热平衡，它们与液体的相对运动起源于渗透作用和它们与周围液体之间的相互作

用 。

到了70——80年代，一些学者明确地把布朗运动归结为液体分子撞击微粒的结果，这些学者有卡蓬内尔、德尔索和梯瑞昂，还有耐格里。植物学家耐格里(1879)从真菌、细菌等通过空气传播的现象，认为这些微粒即使在静止的空气中也可以不沉。联系到物理学中气体分子以很高速度向各方向运动的结论，他推测在阳光下看到的飞舞的尘埃是气体分子从各方向撞击的结果。他说："这些微小尘埃就象弹性球一样被掷来掷去，结果如同分子本身一样能保持长久的悬浮。"不过耐格里又放弃了这一可能达到正确解释的途径，他计算了单个气体分子和尘埃微粒发生弹性碰撞时微粒的速度，结果要比实际观察到的小许多数量级，于是他认为由于气体分子运动的无规则性，它们共同作用的结果不能使微粒达到观察速度值，而在液体中则由于介质和微粒的摩擦阻力和分子间的粘附力，分子运动的设想不能成为合适的解释。

1874——1880年间，卡蓬内尔、德耳索和梯瑞昂的工作解决了耐格里遇到的难题。这里的关键是他们认为由于分子运动的无规则性和分子速度有一分布，在液体或气体中的微观尺度上存在密度和压力的涨落。这种涨落在宏观尺度上抵消掉了。但是如果压方面足够微小，这种不均匀性就不能抵消，液体中的相应的扰动就能表现出来。因此悬浮在液体中的微粒只要足够小，就会不停地振荡下去。卡蓬内尔明确地指出唯一影响此效应的因素是微粒的大小，不过他把这种运动主要看成振荡，而德耳索根据克劳修斯把分子运动归结为平动和转动的观点，认为微粒的运动是无规则位移，这是德耳索的主要贡献。

此后，古伊在1888——1895年期间对布朗运动进行过大量的实

验观察。古伊对分子行为的描述并不比卡蓬内尔等人高明，他也没有弄清涨落的见解。不过他的特别之处是他强调的不是对布朗运动的物理解释，而是把布朗运动作为探究分子运动性质的一个工具。他说："布朗运动表明，并不是分子的运动，而是从分子运动导出的一些结果能向我们提供直接的和可见的证据，说明对热本质假设的正确性。按照这样的观点，这一现象的研究承担了对分子物理学的重要作用。"古伊的文献产生过重要的影响，所以后来贝兰把布朗运动正确解释的来源归功于古伊。

到了 1900 年，F·埃克斯纳完成了布朗运动前期研究的最后工作。他用了许多悬浊液进行了和他的父亲 S·埃克斯纳 30 年前作过的同类研究。他测定了微粒在 1min 内的位移，与前人一样，证实了微粒的速度随粒度增大而降低，随温度升高而增加。他清楚地认识到微粒作为巨大分子加入了液体分子的热运动，指出从这一观点出发"就可以得出微粒的动能和温度之间的关系。"他说："这种可见的运动及其测定值对我们清楚了解液体内部的运动会有进一步的价值"。

以上是 1900 年前对布朗运动研究的基本情况。自然，这些研究与分子运动论的建立是密切相关的。由麦克斯威和玻尔兹曼在 60——70 年代建立的气体分子运动论在概念上的一个重大发展是抛弃了对单个分子进行详细跟踪的方法，而代之以对大量分子的统计处理，这为弄清布朗运动的根源打下了基础。与布朗运动的研究有密切关系的还有在 60 年代由格雷哈姆建立的胶体科学。所谓胶体是由粒度介于宏观粒子和微观分子之间的微粒形成的分散体系，布朗运动正是胶体粒子在液体介质中表现的运动。

对于布朗运动的研究，1900 年是个重要的分界线。至此，布朗运动的适当的物理模型已经显明，剩下的问题是需要作出定量的理

论描述了。

以 $W(t)$表示运动中一微粒从时刻 t=0 到时刻 t>0 的位移的横坐标（同样也可设纵坐标）且设 $W(0)=0$。根据爱因斯 1905 年提出的理论，微粒的这种运动是由于受到大量随机的，相互独立的分子碰撞的结果。于是，粒子在时段$(s，t]$（与相继两次碰撞的时间间隔相比是很大的量）上的位移可看作是许多微小位移的代数和，则 $W(t)$-$W(s)$服从正态分布。

显然，依中心极限定理，假定位移 $W(t)$-$W(s)$为正态分布是合理的。其次，由于粒子的运动完全是由液体分子的碰撞而引起的。这样，在不相互重叠的时间间隔内，碰撞的次数、大小和方向可假定是相互独立的，这就是说位移 $W(t)$具有独立的增量。另外，液面处于平衡以态，这时粒子在一时段上位移的概率分布可以认为只依赖于这时段的长度，而与观察的起始时刻无关，即 $W(t)$具有平稳增量。

2. 维纳过程的概念和理论分析

维纳过程是一类非常重要的随机过程，它是基于对粒子布朗运动的数学刻画。维纳过程经常被广泛地应用到通信理论、生物学、经济学、管理学等其他应用学科之中。

（1）维纳过程的定义

定义：如果随机过程$\{W(t)，t\geq 0\}$是二阶矩过程，且满足下列条件：

① $W(0)=0$;

② $E[W(t)]=0$;

③ 具有平稳独立增量;

④ $t>0$，W(t)~N$(0, \sigma^2 t)$, $(\sigma > 0)$

称{ $W(t)$，$t\geqslant 0$} 为参数σ^2的维纳过程（或布朗运动）。

定义 2：若一个随机过程{ $W(t)$，$t\geq 0$}是二阶矩过程，且满足：

① $W(t)$是独立增量过程；

② 任意 s，t>0, $W(t+s)$- $W(s)$~$N(0, \sigma^2 t)$，即 X(s+t)-X(s)是一个数学期望为 0，方差为$\sigma^2 t$的正态分布；

③ $W(t)$是关于 t 是连续函数；

则称{ $W(t)$，$t\geq 0$}是维纳过程（Wiener process）或布朗运动。

（2）维纳过程的概率分布

一维概率分布：$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}t}$

增量分布：$W(t) - W(S) \sim N(0, \sigma^2|t - s|)$

协方差函数：$C(s,t) \sim \sigma^2 min(s,t)$

二维概率分布：（W(t),W(s)）~N（0,C）其中 C 为协方差矩阵。

n 维概率分布：$\begin{bmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ W(t_3) \\ \cdots \\ W(t_n) \end{bmatrix} \sim N(0,C)$，其中：

$$C=\begin{bmatrix} \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_1 \ldots & \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_1 \\ \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_2 & \sigma^2 t_1 \ldots & \sigma^2 t & \sigma^2 t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_2 & \sigma^2 t_3 \ldots & \sigma^2 t_{n-1} & \sigma^2 t_n \end{bmatrix}$$

（3）维纳过程的性质

① 基本性质

对任意的正实数，一维的维纳过程在时刻是一个随机变量，它的概率密度函数是：$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}t}$

这是因为按照维纳过程的定义，可以推出其一维分布，如上式所示。且其数字特征（数学期望、方差）均可以根据定义求出，结果已给出，在此不再赘述。

在维纳过程的独立增量定义中，由于满足增量的相互独立性，因此，增量分布服从一维分布，且不同时刻间隔的增量过程的协方差为零（相互独立），那么，两个不同时刻的协方差函数为：

$C(s,t)\sim\sigma^2 min(s,t)$。

协方差和相关性函数相关系数是：协方差=相关函数。

这是因为，维纳过程是均值为零的正态过程，根据协方差函数和相关函数的关系可知，零均值的随机过程，其协方差函数和相关函数是相等的。

② 即时最值

根据维纳过程中的即时最大值与 W_t 的联合概率分布，可得出即时最大值的分布是对的积分，即为：

$$f_{M_t}=\int_{-\infty}^{\infty}f_{M_t,W_t}(m,\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(2m-\omega)}{t\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(2m-\omega)^2}{2t}}d\omega$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{m^2}{2t}}$$

由于维纳过程上下对称，即时最小值显然是即时最大值的相反数。

③对称性质

将一个维纳过程不断按比例展开，它的一部分就会呈现另一个维纳过程的样子

- 尺度不变性：对任意的正实数，随机过程都仍然是一个维纳过程。
- 时间反转：对任意的正实数，随机过程和性质相同。
- 空间对称：随机过程也是一个维纳过程。
- 时间反演：随机过程也是一个维纳过程。

总结如下：

④ 维纳过程是平稳独立增量过程。该过程在任一时间区间上变化的概率分布独立于其在任一的其他时间区间上变化的概率；维纳过程增量的分布只与时间差有关，所以它是齐次的独立增量过程。

⑤维纳过程是正态过程。其方差随时间区间的长度呈线性增加，其分布完全由它的均值函数与自协方差函数所确定，维纳过程不只是布朗运动的数学模型，电子元件在恒温下的热噪声也可归结为维纳过程。

⑥ 维纳过程是马尔可夫过程。因此该过程的当前值就是做出其未来预测中所需的全部信息；

维纳过程具有马尔可夫性质，也就是说，在任意一点之后的走势仅仅和这一点的取值相关，而与之前的取值无关。因此维纳过程具有时间平移不变性：随机过程也是一个维纳过程。不仅如此，维纳过程还满足强马尔可夫性质：对任意的有限停时，随机变量独立于滤波。

维纳过程的强马尔可夫性质，说明即便给定的时间不是定时而是一个停时，维纳过程在停时之后的走势仍然与之前无关。所以，将停时之后的维纳过程上下反转，仍然会是一个维纳过程。用数学语言来说，就是：给定一个停时之后，随机变量也是一个维纳过程。这个性质也称为维纳过程的反射原理。

⑦ 维纳过程是均方连续、均方不可导、均方可积的二阶矩过程；

维纳过程的自相关函数是分段函数$\sigma^2 min(s,t)$，但是该函数在其定义域（−∞，∞）上处处连续，因此维纳过程是连续函数，但是维纳过程的自相关函数不可导，因此维纳过程也是不可导的，由于均方连续可得到均方可积，因此，维纳过程是均方可积的二阶矩过程。

⑧ 维纳过程是非平稳过程，但为平稳增量过程。

平稳随机过程分为宽平稳随机过程（也称为广义平稳随机过程）和窄平稳随机过程（也称为狭义平稳随机过程），其定义为：随机过程的概率分布函数（狭义平稳）、概率密度函数（狭义平稳）或数字特征（广义平稳）不随时间而变化（与时间的起点无关）的随机过程称为平稳随机过程。表示形式为如下式所示。

狭义平稳随机过程的定义：若随机过程的概率统计特性（概率分布函数和概率密度函数）与时间的起点选取无关，则该过程称为窄平稳随机过程。

$$f(x_1,x_2,...,x_{n1},t_1,t_2,...,t_n,)=f(x_1,x_2,...,x_{n1},t_1+a,t_2+a,...t_n+n)$$

广义平稳随机过程的定义：若随机过程为二阶矩过程，且其数学期望与时间无关，为一常数，相关函数与时间的起点无关，仅仅

与时间差有关，则该随机过程为广义平稳随机过程。

$$m_x = \overline{m_x} = C\text{（常数）};$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1)$$

即：它们与事件起点的选择无关，称为宽平稳随机过程，工程上，也称为弱平稳随机过程。

维纳过程不是平稳过程，这因为维纳过程过程的自相关函数为：$R(s,t) \sim \sigma^2 min(s,t)$。

自相关函数与时间的起点相关，因此按照维纳过程的定义，维纳过程不是宽平稳随机过程，又因为维纳过程是二阶矩过程和高斯过程，因此维纳过程也不是窄平稳随机过程。

3. 维纳过程的模拟与实现

（1）维纳过程的数学建模与程序模拟

为方便学生对维纳过程的进行过程及结果有更加直观地认识，加深其对概念的理解，对维纳过程进行了小程序的设计，编制了一个演示版本的维纳过程，该设计的程序有演示界面和演示结果，通过设置不从参数，可以看到部分演示过程和演示结果，具体建模过程和操作及演示结果如下。

维纳过程的建模过程可以通过高尔顿钉板实验来演示，演示程序界面如图 1 所示。高尔顿顶板实验是由英国科学家高尔顿设计的，他假设有无穷多层钉板如图所示交错放置，自上端放一小球，任其自由落下，在其落下过程中小球碰到钉子时从左边落下和从右边落下的机会相等，碰到下一钉子时又是如此，最后落入底板中的某一格子。因此，任意放入一球，则此球落入哪一个格子事先难以确定。当钉板层数足够大，放入的小球足够多时，最后观察小球落在底板中的规律，按照中心极限定理，服从正态分布，该过程也是维纳过

程的数学模型。

根据高尔顿钉板实验的原型，现将其进行电脑模拟与演示，模拟后的界面如图 1、图 2、图 3 和图 4 所示。

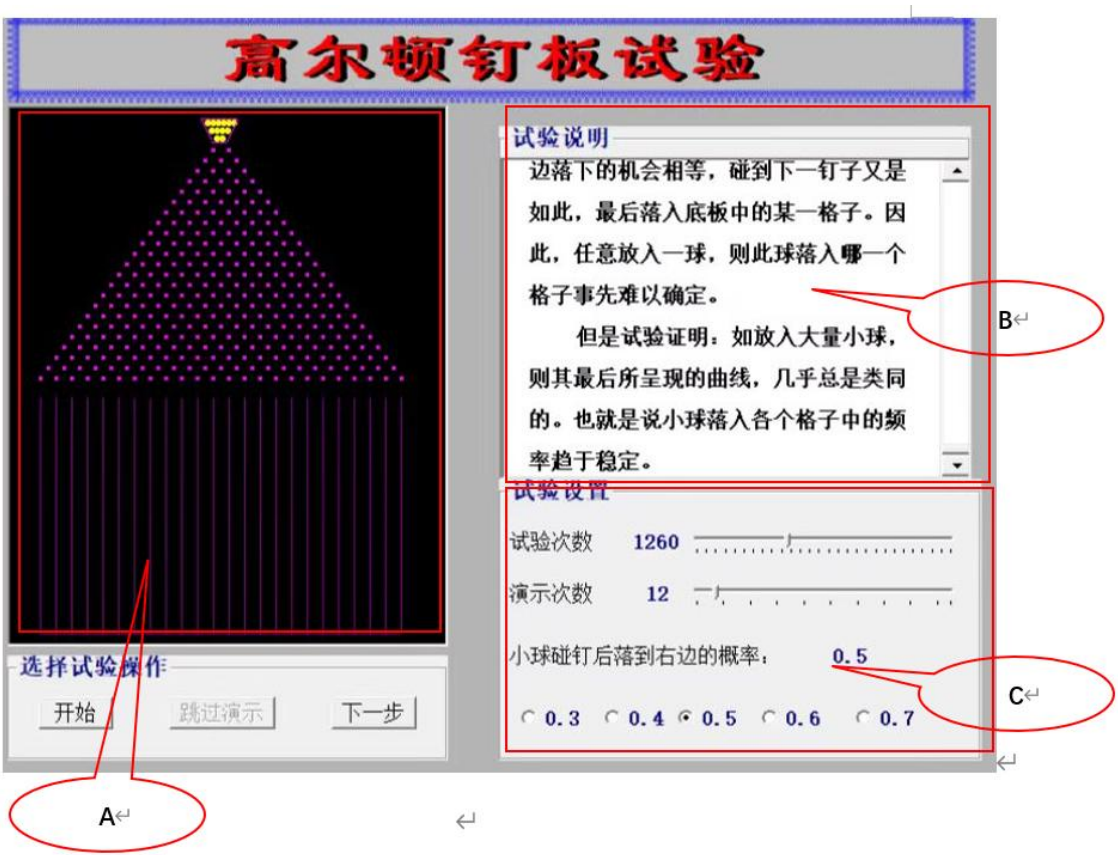

图 1 高尔顿钉板实验模拟

在图 1 中，演示界面包括 3 部分，其中，图中 A 是演示结果显示界面，图中 B 是实验说明部分，图中 C 是参数调节部分，可调节的参数有：小球碰钉后向左向右的概率（p=0.3、0.4、0.5、0.6、0.7，一般情况下，可假设 p=0.5）、试验次数（最大可设置为 3000）、演示次数（最大可设置为 100）。根据演示程序，设置了小球碰钉后向左或向右的概率为 0.5 时的演示过程（如图 2 所示）和演示结果（如图 3 所示）。为了使得演示过程更加直观，可以设定小球每次下落的演示，演示次数可以随意设置，见图 3 中演示次数（本次演示设置为 12 次），因实验次数比较大，如果每次都演示用时较多（本次演

示设置了小球下落 1260 次），为节省时间，一般来说只演示 10 多次即可。

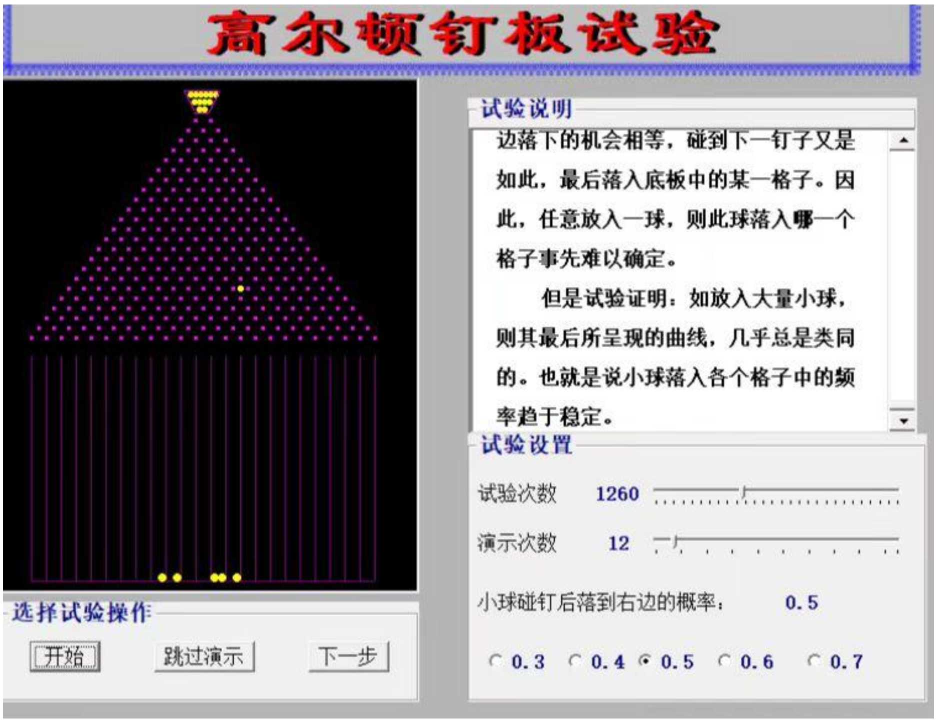

图 2 仿真演示过程

通过多次试验，试验结果如图 3 所示，该试验表明：如放入大量小球，最后小球在底板中所处位置呈现的曲线，几乎总是类同的，也就是说，小球落入各个格子中的频率趋于稳定。

为了将演示结果更一般化，可将小球碰钉子后向右落下的概率分别设为 0.3、0.5、0.7，通过反复试验后进行进一步比较，不难发现：小球在底板中所处位置呈现的曲线的形状几乎不发生改变，但是小球向左向右的中心位置有所偏移，向左概率越大，中心位置越靠左，向右概率越大，中心位置越靠右。具体仿真结果比较如图 4 所示。实际上，中心位置的改变反应出来的是数字特征中数学期望的变化，可以看出，当概率变化时，数学期望的大小也在变化，因此，中心位置发生了偏移，由此可见，理论和实际的结果是保持一致的。而维纳过程是概率为 0.5 时的高尔顿钉板实验的推广，此时，

均值始终为零，因此，可以看到中心位置也在坐标的正中心。

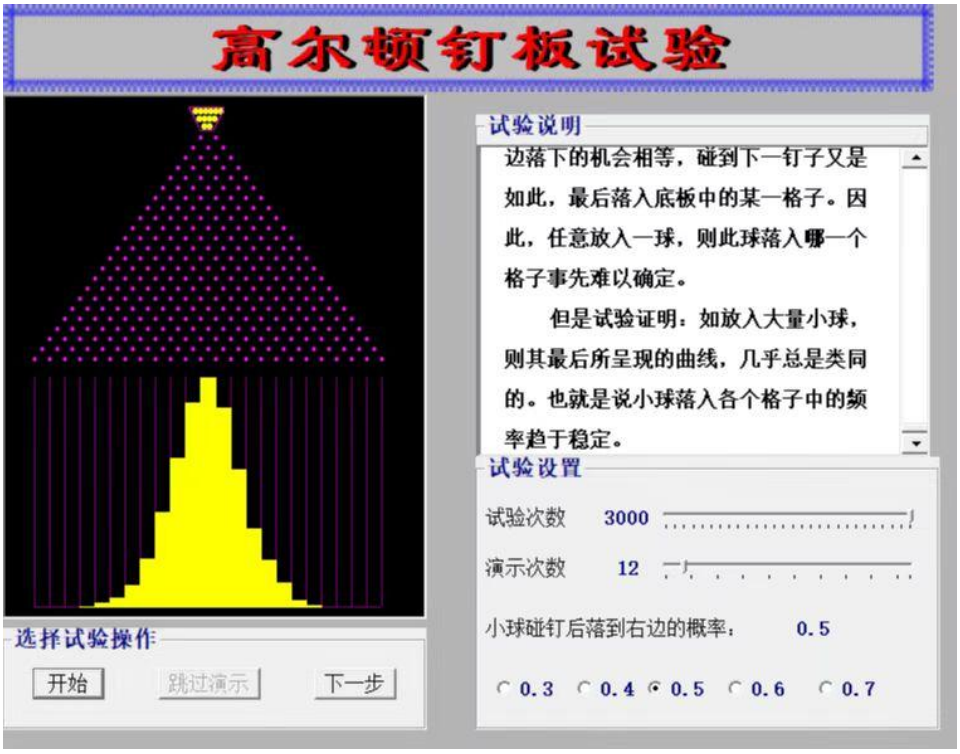

图 3 仿真演示结果

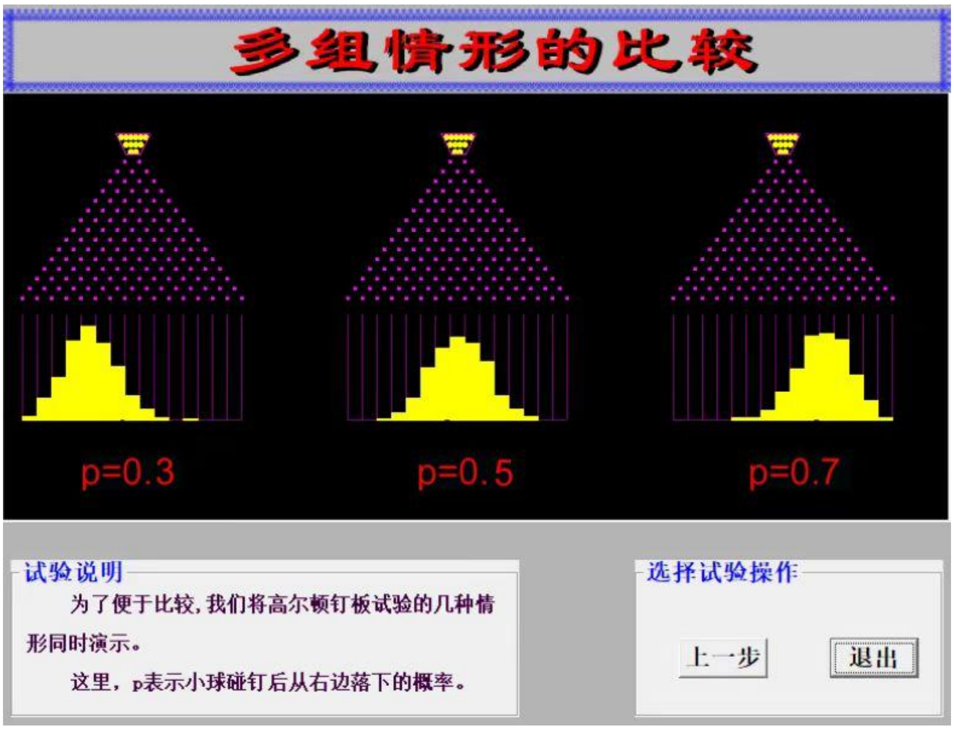

图 4 不同概率下仿真结果比较

通过本程序的演示，可以清晰地看出，大量独立同分布的随机变

量之和服从正态分布，正态分布的曲线也很直观，随着次数的增大，离散变量之和的分布情况和连续分布情况越来越一致，实践演示结果和理论分析图形越来越重合，这也是理论联系实际的一种表现，也会通过实际动手操作和模拟，加深对理论知识的理解和掌握，从而也会在实际生活中观察出更多的理论来源之处。

（2）维纳过程的 matlab 仿真过程

以一个简单的例子进行模拟，采用 matlab 仿真维纳过程的实现过程，具体的步骤和程序如下，程序演示结果如图 5 和图 6 所示。通过显示结果，可以看出维纳过程的随机性，这也是在人们的生活中经常出现的一种现象。

① 用 randn 产生一个随机序列,在[0，T]上模拟布朗运动路径，并设初始值；

② 分割为 N 个小区间，每个区间长度为 T/N=dt;

③ 利用性质：W(1)-W(0)~N(0,r)

W(j)-W(j-1)~N(0,r),j=2,…,N。

仿真过程的流程图在此不在详细列出，其相应的仿真程序如下所示。

（3）matlab 仿真程序

```
randn('state',100) % 产生随机态
T = 1; N = 500; dt = T/N; %设置迭代次数和步长（可以改变）
dW = zeros(1,N); % 存放位置
W = zeros(1,N); % 为了加快运算速度
```

dW(1) = sqrt(dt)*randn; % 循环前要进行程序的初始化

W(1) = dW(1); % W(0) = 0 不允许，所以首先设定初始值

for j = 2:N

dW(j) = sqrt(dt)*randn; % 产生序列

W(j) = W(j-1) + dW(j); %按照维纳过程的基本规则开始运算

end

plot([0:dt:T],[0,W],'r-') % 将运算结果进行画图表示

xlabel('t','FontSize',16) %设置图形中的 x 坐标的标出范围和字体

ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0) %设置图形中的 y 坐标的标出范围和字体

程序结束，在系统中运行，仿真结果如图 5 和图 6 所示。

（4）matlab 仿真结果

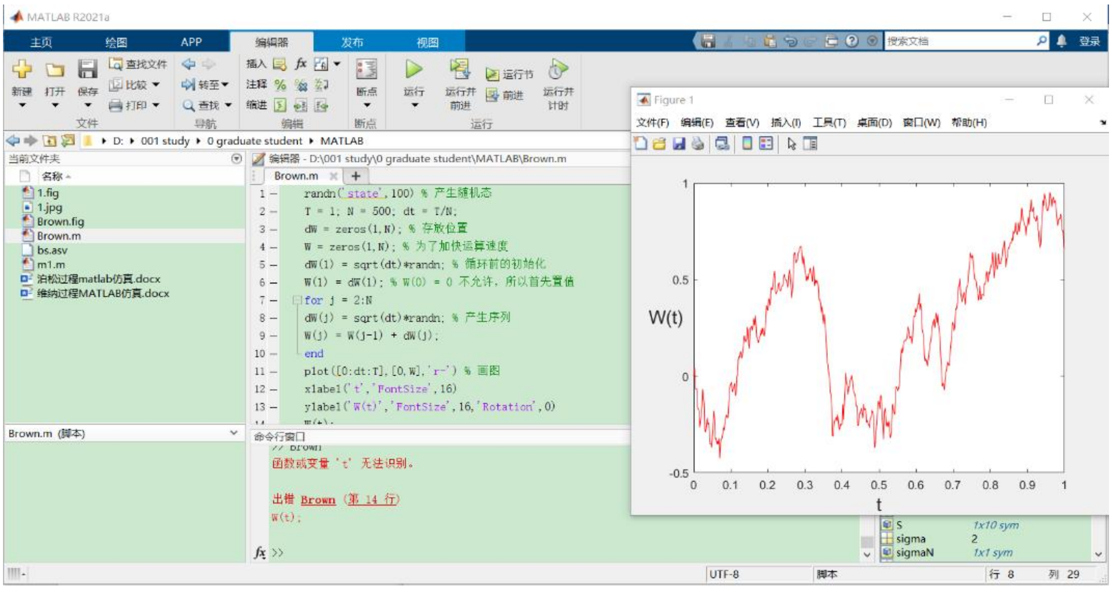

图 5 仿真程序及结果界面

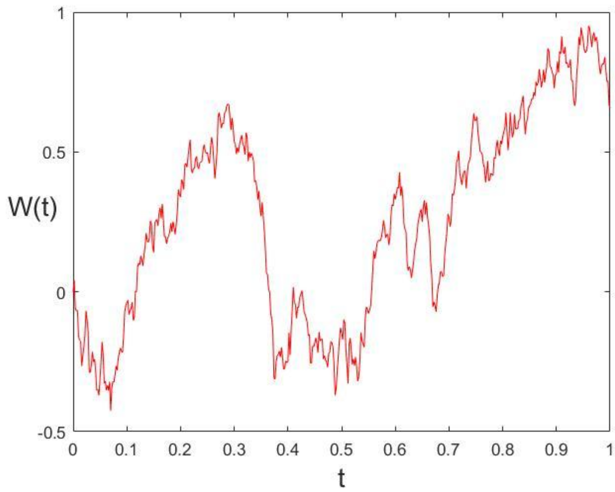

图 6 维纳随机过程仿真结果

4. 维纳过程的应用

维纳过程的应用非常广泛。

（1）维纳过程在股票中的应用

在经济学中，尤其是在股票市场中，维纳过程被广泛应用于股票的价格预测和未来收益率的分布情况，这是因为股票的价格波动也是一个典型的随机过程，其模型可以用维纳过程来模拟。通过维纳过程模拟的股票价格变化，可以帮助金融和投资人更好地了解市场的走向和趋势，从而帮助投资者分析市场行情，做出更明智的决策。

经过对股票价钱的研究和理论分析，常常假定股价服从扩散分布，且大多数情况下都是几何布朗运动。在次条件下，任一期间的复合利润率是服从正态分布的。此假设的统计特性是计算上比较方便。因为正态分布满足假发的封闭性，故不论股票的套利组合是什么样的，它都仍然满足正态分布。假如风险行为减到零，那么股票利润率的分布相同，也是服从正态过程。

一般化的维纳过程的基本形式为：

$$\Delta s=\mu\Delta t+\sigma\Delta W$$

式子中，Δs表示股票价格 s 在很小的时间间隔中Δt中的变化，Δt表示股票价格波动的时间间隔，μ和 σ是模型中的待定参数，一般来说，在进行过程模拟时，可将两个参数提前设定，参数的设定一般是根据系统的经验值或者预测值作以假设，同时可以根据实际情况实时调整，以便使得模型更加合理。

在维纳过程模拟股票价格是，需要对初始价格、模拟天数、模拟次数、预期收益率和预期波动率等参数输入量进行提前设置，此时系统会方便快捷的模拟出股票价格的走势。从单次模拟和多次模拟的结果来看，模拟结果具有一定的稳定性，符合一定的股票价格波动规律，可以为股票从业者提供一定的理论依据，因此维纳过程也是在股票预测中经常采用的一个模型。

（2）维纳过程在图像领域中的应用

信号处理是维纳过程应用的一个重要领域，因此它的应用也很广泛，通过对信号的处理，可以帮助们更好的了解信号的特征，从而才能够做出更加准确的判。此外，在图像处理领域，维纳过程也有应用，例如，维纳滤波是假设图像信号可以近似看成平稳随机过程且输入图像的统计特性是已知的前提下，按照使输入图像和恢复图像之间的均方误差达到最小的准则函数来实现图像恢复的方法。尽管大多数图像整体上并不是稳定的, 但有许多图像可以被认为是局部平稳的。

在实际的生活中，人们要接触很多图像，而在景物成像过程中可能会出现模糊、失真或混入噪声导致图像质量下降，这种现象称

为图像“退化”。因此，我们可以采取一些技术手段使图像恢复到本来面目，其中最典型的恢复算法就是维纳滤波。

①仿真程序

close all; %清除界面，保持运行程序前其他界面关闭

clear; %清除界面，保持运行程序前无干扰

RGB = imread('D:\\program\\图片 1.jpg'); %读取指定图片中的信息，括号中为图片的存储位置与名称

I=rgb2gray(RGB);%图像变灰处理

figure(1)；%图片 1 处理过程

imshow(I); %显示图片

title('original image');%给图片命标题（标题为：原始图像）

J= imnoise(I,'gaussian',0,0.005);%加入干扰

figure(2); %图片 2 处理过程

subplot(1,2,1); %画图

imshow(J); %显示另一张图片

title('gaussian blurred image')%给干扰后的图像命标题（标题为：经维纳滤波后复原图像）

J0=wiener2(J,[10 10]);%维纳滤波

subplot(1,2,2); %画多个图形

imshow(J0); 给图片命名

title('image tracked with wiener fliter')%给滤波后图像命名

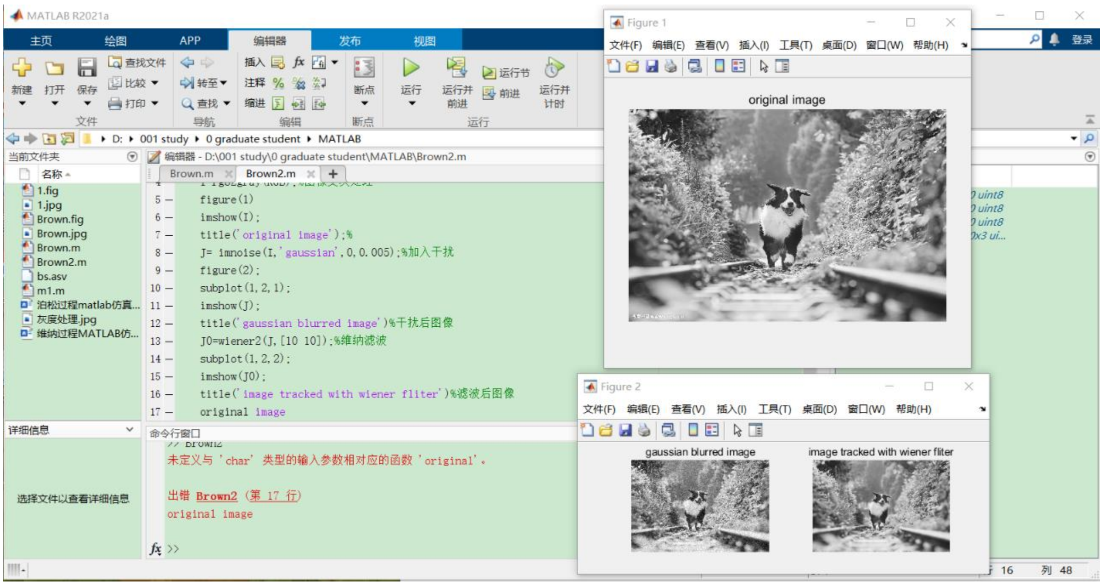

图 7 原图灰化过程与显示

②仿真结果

图 8 不同图像滤波前后对比（上：原图）

通过维纳滤波得到的大多数图像整体上具有不稳定性，但是从局部的角度来看，满足稳定性即有一定的应用意义。维纳滤波的处理方法是将数日图像信号看作是平稳随机过程，且在输入图像的统计特性已知的前提夏，按照使得输入的图像和复原的额图像之间的均方误差最小的准则函数来实现图像局部高复原的一种图像处理方

法。

现实生活中，人们所获得的信号大部分都被会污染，有用信号很少。例如，传输信号时，由于有信道噪声，人们所获取的信号就会受到污染，为了从获取的信号中提取出有用信号，需要设计一种滤波器对获取到的信号进行滤波，使得滤波输出的信号无限接近有用的信号，而维纳滤波器正是较理想的滤波器。其目的就是求最优滤波系数，使得均方误差达到最小，即为均方误差最小原则。一般的图像相临近的像素的值差不多大，所以图像的自相关函数会随着与原点距离的增加而变小，图像的自相关函数进行傅里叶变换就是功率谱。维纳滤波复原方法是假定图像信号和噪声信号均近似看成是平稳随机过程，然后看均方误差是否达到最小。维纳滤波是有约束的滤波，它其中一个优点是能减小噪声对它复原效果的影响。通过实验对比，可以看出，在先验知识已知的情况下，维纳滤波的复原效果比较好。

实际上，维纳滤波的获得所需要的已知条件很多，先验知识需要相对的丰富，因此一般情况下若不能有足够的先验知识时，维纳滤波就不能发挥自身的作用，所以在此基础上进行维纳滤波的算法优化。维纳滤波的原理式子中有一个噪声信号功率比，这个值的设定暂且未知，但是在模拟实验中可以设定一个噪声信号功率比，即采取不同的k值进行实验。在此基础上优化得到一个原图像的功率谱密度估计值和噪声均方值继续进行维纳滤波，这期间利用第一次得到的结果进行估值，等于对图像加了不同的权值，克服了维纳滤波的缺点，效果会更好。

5. 结束语

对随机产生的序列模拟布朗运动路径，利用维纳过程的性质作

图。维纳过程增量的分布只与时间差有关，所以，维纳过程是齐次的独立增量过程，也是正态过程，其分布完全由它的均值函数与自协方差函数所确定。维纳过程的地位在纯数学中与在应用数学中同等重要。在纯数学中，维纳过程导致了对连续鞅理论的研究，是刻画一系列重要的复杂过程的基本工具。它在随机分析、扩散过程和位势论领域的研究中是不可或缺的。在应用数学中，维纳过程可以描述高斯白噪声的积分形式。在电子工程中，维纳过程是建立噪音的数学模型的重要部分。控制论中，维纳过程可以用来表示不可知因素。总之，维纳过程的应用非常广泛，是《随机过程及应用》课程中的一种重要和典型的随机过程，也是学习和应用中必不可少的类随机过程，因此，对维纳过程要全面理解和掌握。此外，在应用中，我们还会遇到维纳过程的改进，虽然发生了部分改变，但仍然以维纳过程为基础，只有掌握基本的理论，才能以不变应万变，因此，维纳过程的理论分析虽然不太复杂，但是对维纳过程的全面分析和理解仍是课堂教学中非常重要的一个环节。

6.思考题

① 维纳过程的统计规律有哪些？

② 如何理解维纳过程的特点？

③ 归纳总结维纳过程的性质有哪些？

④ 请列举你所学的专业领域中，维纳过程的应用，以及如何来分析和处理这种维纳过程？

7.案例使用说明

（1）适用课程

《概率论与数理统计》、《随机过程及应用》、《随机信号分析》等课程

（2）教学目标

① 理解维纳过程的数学概念和模型；

② 掌握维纳过程的特点和应用；

③ 掌握工程中维纳过程的应用和处理方法；

④ 能够对维纳过程进行仿真，能够采用工程的观点分析维纳过程的应用。

（3）涉及知识点

① 维纳过程的概念；

② 维纳过程的数学模型；

③ 维纳过程的特点；

④ 维纳过程的性质；

⑤ 维纳过程的应用与仿真。

（4）要点分析

① 维纳过程数学模型的建立过程分析；

② 维纳过程的理论分析和性质；

③ 维纳过程的在工程中的应用和仿真；

（5）课堂安排

讲授 3 学时（课堂），小组讨论 3 学时（课下），仿真模拟与实现 3 学时（课下）。

（6）案例使用过程中存在的问题和解决办法

在 2022 级研究生的《随机过程及应用》课程讲授过程中（讲授时间：2022 年秋季（2022 年 9 月-2023 年 1 月）），采用了此案例进行教学，教学中发现主要有两个问题：一是，在课堂讲解过程中给大家演示了高尔顿钉板实验的现象和结果，课堂反映非常好，学生们能够将抽象的学习转化成直观的结果，获得了一致的好评。但是，

此方法由于是直接在课堂上采用，由于时间原因，学生只能用来演示，无法对其流程进行分析，为了改进这个缺点，我在课堂之外给学生布置了一个拓展的任务，要求学生 2-3 人为一组，采用 matlab 仿真了维纳过程的实现，并探讨了维纳过程的应用。根据上交的作业，发现学生完成的情况参差不齐，有的很不错，有的仅仅是网上信息的复制，存在投机取巧之嫌。以小组为单位的任务，避免了一个人耗时耗力完成中的困难，让学生通过讨论、任务分配和合作的形式来完成，分解了任务的难度，增加了任务的可执行性，也有利于调动学生的积极性。同样由于时间关系，无法实现在课堂上的一一点评。

（7）案例在教学过程中的解决办法

根据以上在教学过程实施案例教学发现的问题，计划在下一步的教学过程中，调整教学方法，主要应对方法有：

在课堂上，仍然采用该案例进行讲解和演示；在课外，除了让学生对维纳过程进行计算机的模拟仿真实现之外，还要让学生之间互相讨论，增加以小组为单位的案例讲解过程，以增加学生对理论知识的掌握和理解程度，同样由于时间关系，小组讨论、案例仿真和案例讲解（由组长分配讲解人）都在课外进行，可抽取 2-3 个案例尝试进行课外的拓展，作为对课内理论知识的补充，也提高学生的实践应用能力。

作为小组完成任务时，为充分调动学生的积极性，严禁超过 3 人组队，并且在任务报告中要将任务完成情况进行分析，要明确标注出谁完成了哪部分，且说明，哪部分是复制的，哪部分是自己独立完成和运行的。